

文章编号 1004-924X(2017)11-2904-10

$(2PRR)^2 + R$ 平面并联机构的刚度与固有频率

张东胜¹, 许允斗^{1,2}, 姚建涛^{1,2}, 赵永生^{1,2*}

- (1. 燕山大学 河北省并联机器人与机电系统实验室, 河北 秦皇岛 066004;
2. 燕山大学 先进锻压成形技术与科学教育部重点实验室, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 基于两移动一转动三自由度平面并联机构构造了一种新型五自由度串并混联机器人并对其并联部分, 一具有运动冗余和驱动冗余两种不同模式的平面并联机构 $(2PRR)^2 + R$ 进行了运动学分析。首先, 建立了三自由度平面并联机构的运动学模型, 基于机构的运动学模型推导得到了冗余和非冗余驱动并联机构的刚度矩阵, 并且通过求取并联机构各组成构件的等效质量, 得到并联机构的质量矩阵; 然后, 借助系统刚度矩阵和质量矩阵建立的并联机构动力学方程, 求得了机构的固有频率方程; 最后, 通过数值仿真对冗余和非冗余驱动并联机构的刚度及固有频率进行对比分析。结果显示: 冗余驱动分支对机构绕 Z 轴方向角刚度和系统的一阶固有频率均值影响最大, 其增幅分别为 88.46% 和 31.50%; 对 X 轴方向的线刚度和系统的二阶固有频率均值影响最小, 其增幅分别为 52.34% 和 1.90%。因此, 冗余驱动分支有助于提高并联机构的整体刚度, 改善机构的动态性能。

关键词: 平面并联机构; 运动冗余; 驱动冗余; 刚度; 固有频率

中图分类号: TP242 **文献标识码:** A **doi:** 10.3788/OPE.20172511.2904

Stiffness and natural frequency of a $(2PRR)^2 + R$ planar parallel mechanism

ZHANG Dong-sheng¹, XU Yun-dou^{1,2}, YAO Jian-tao^{1,2}, ZHAO Yong-sheng^{1,2*}

- (1. *Parallel Robot and Mechatronic System Laboratory of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China;*
 2. *Key Laboratory of Advanced Forging & Stamping Technology and Science of Ministry of Education, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*
- * *Corresponding author, E-mail: yszhao@ysu.edu.cn*

Abstract: A novel 5-degree-of-freedom (DOF) hybrid serial-parallel manipulator was proposed. The kinematics of Parallel Mechanism (PM) of the 5-DOF hybrid manipulator was analyzed. The PM is a 3-DOF (one translational DOF and two rotational DOFs) metamorphic planar PM $(2PRR)^2 + R$ with two different types of configurations: actuation redundancy and kinematic redundancy. Firstly, the kinematics model of the 3-DOF planar PM was established. Then, the stiffness matrix of the planar PM was obtained on the basis of kinematics analysis and the mass matrix was obtained by solving each

收稿日期: 2017-03-31; 修订日期: 2017-05-22.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 51405425); 河北省重点基础研究资助项目 (No. 15961805D); 河北省研究生创新资助项目 (No. 2016SJBS001); 河北省自然科学基金资助项目 (No. E2017203387)

equivalent component mass of the planar PM. Furthermore, the system dynamic equation was established through combining the stiffness matrix and mass matrix, and the natural frequency equation was obtained incidentally based on the dynamic equation. Finally, the stiffnesses and natural frequencies for the redundant and non-redundant planar PMs were analyzed and compared by numerical simulation. The results show that the maximum extend ranges of the stiffness around Z-axis and the first-order natural frequency reach 88.46% and 31.50%, respectively; and the minimum extend ranges of the stiffness along X-axis and the second-order natural frequency reach 52.34% and 1.90%, respectively. Thus, the stiffness and natural frequency of the planar PM have been obviously improved by adding actuation redundancy.

Key words: planar parallel mechanism; kinematic redundancy; actuation redundancy; stiffness; natural frequency

1 引言

并联机构与串联机构相比具有结构紧凑、刚度高和承载能力大的特点^[1-3],使其在工业、航空航天、军事等领域有较高的应用价值。在并联机构中,平面并联机构与空间并联机构相比,具有结构简单、运动学及动力学模型简单及制造成本低的特点^[4-6],使其在机器人后期控制中具有明显优势,因此平面并联机构受到国内外学者的重视。然而,并联机构存在工作空间小、动平台灵活度低及容易产生机构奇异等缺点^[7-8],尤其机构的奇异位型会造成机构失控、结构破坏等危害^[9],使其在实际工程应用中有所受限。针对并联机构存在的缺点,人们通常采用增加驱动冗余或运动冗余的方式来减少机构的奇异位型^[10-12],此类方法有助于增大机构的工作空间,提高动平台的灵活度。

驱动冗余^[13-14]并联机构为机构本身驱动数大于机构输出自由度(Degree of Freedom, DOF),可通过在原有非冗余并联机构的基础上增加额外的驱动分支^[15-17]或在原有机体的某些关节处增加驱动装置^[18]来实现。增加冗余驱动分支的方式不仅能改善现有并联机构的缺点,且能够提高并联机构的刚度。但是,驱动冗余给机构带来新的驱动力^[19-20],不协调的驱动力将造成机构内力的出现,故驱动冗余并联机构对控制精度具有较高要求。对于运动冗余^[21-23]并联机构,机构的输出自由度大于机构本身所需自由度数,可通过在驱动冗余并联机构基础上增加中间连杆,释放机构的结构内力的方式实现。运动冗余

并联机构同样可以减少机构的奇异位型,增大工作空间,提高动平台的灵活度,但相比驱动冗余并联机构而言,降低了机构的整体刚度。故无论驱动冗余还是运动冗余并联机构在解决传统并联机构存在的问题时,均有各自的优缺点。

本文的主要研究对象为一种新型 5-DOF 混联机器人的并联部分^[11, 24],本文将针对分别具有 3 条分支的非冗余驱动和具有 4 条分支的冗余驱动并联机构为原型进行研究。为实现对非冗余和冗余驱动平面并联机构的对比分析,得出冗余驱动分支对机构正体性能的影响,建立了该 3-DOF 平面并联机构的运动学模型;求得了机构的刚度矩阵和质量矩阵;基于系统刚度矩阵和质量矩阵获得机构的固有频率方程;对非冗余和冗余驱动平面并联机构进行刚度和固有频率仿真,对仿真结果进行了对比分析并给出了平面并联机构刚度模型与冗余自由度和动平台位置之间的图谱关系。

2 平面并联机构的构型描述

如图 1 所示,左侧给出由 3-DOF 平面并联机构(2PRR)²+R 和 2-DOF 工作台组成的 5-DOF 串并混联机器人构型,该 5-DOF 混联机器人具有结构简单和模块化程度高的特点,可用于曲面加工、焊接、切割、装配及分选等工业领域。右侧表示该 3-DOF 平面并联机构为一运动冗余平面并联机构,具有沿 X 和 Y 轴方向的移动和绕 Z 轴的转动自由度。由图可知,该运动冗余平面并联机构由机架、动平台、中间连杆及 4 条结构相同的 PRR 分支组成,平面并联机构的左侧两分支连接

动平台的 R 副共轴,连接机架的 P 副共线;右侧两分支连接中间连杆的 R 副共轴,连接机架的 P 副共线。

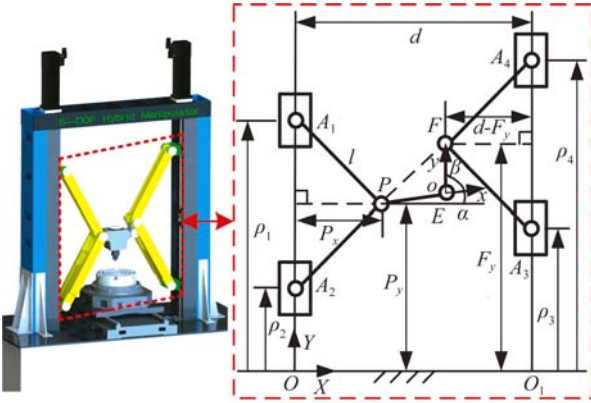


图 1 3-DOF 平面并联机构构型

Fig.1 Configuration of a 3-DOF planar parallel mechanism

如果将动平台和中间连杆之间的转动副锁死或者将动平台和中间连杆固结在一起,那么该机构即成为具有冗余驱动的平面并联机构。在机构设计的初级阶段,可采取较简单的方式来实现动平台和中间连杆的锁死。如图 2 所示,可根据实际需求,设计不同角度的辅助装置安装于动平台和中间连杆之间,这种方法既简单又有效。

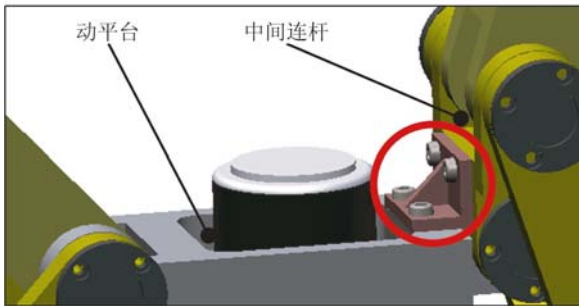


图 2 运动冗余/驱动冗余机构的转换

Fig.2 Switch between kinematic and actuation redundancy planar parallel mechanism

从研究角度,该 3-DOF 平面并联机构所具有的运动冗余和驱动冗余两种工作模式,使其在后期研究工作中,不仅可以研究运动冗余平面并联机构的控制策略,而且还可以研究具有冗余驱动平面并联机构的控制策略,增强了机器人的可研究性;从应用角度,可根据不同的操作任务改变机构的工作模式,充分发挥机器人的性能;从经济角

度,该机构结构简单,可较大程度上降低机构的制造成本。

3 逆运动学

文献[11]已对平面并联机构进行了详细的运动学分析,为方便得到机构的刚度矩阵和质量矩阵,需构造出滑块、分支杆与动平台 PE 和中间连杆 EF 之间的 3×6 型速度、角速度映射矩阵,故接下来仅做必要的运动学分析。如图 1 所示,在定平台上建立参考坐标系 O-XYZ,将 E 点作为动平台上的参考点,建立连体坐标系 o-xyz,其中 x 轴方向与 PE 重合,y 轴垂直于 PE。在定系中,转动副中心 A_i 的位置向量为 $\rho_i e_i$;点 P、E、F 的位置向量分别表示为 \mathbf{P} 、 \mathbf{E} 、 \mathbf{F} 。

平面并联机构动平台 PE 姿态矩阵为 \mathbf{R}_1 ,中间连杆 EF 相对于 PE 的姿态矩阵为 \mathbf{R}_2 :

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中: α 为动平台中 PE 和 X 轴的夹角,设定连杆 EF 与动平台 PE 的夹角为 β 。

动平台 P 点在定系中的坐标向量为:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} + \mathbf{R}_1 \mathbf{M}, \quad (2)$$

其中: $\mathbf{E} = (E_x \ E_y \ 0)^T$ 为动平台参考点 E 在定系中的表示, $\mathbf{M} = (-m \ 0 \ 0)^T$ 为 P 点在动系中的表示, m 为动平台 PE 的长度。

同理,可求得动平台中 F 点在定系中的坐标向量为:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{N}, \quad (3)$$

其中: $\mathbf{N} = (n \ 0 \ 0)^T$ 为 F 点在动系中的表示, n 为中间连杆 EF 的长度。

当给定动平台的位置和姿态后,通过式(1)~(3)即可分别求得图 1 中 P 点和 F 点到机架的距离。利用直角三角形的边长关系,可得出 4 个滑块在基坐标系中的位置矢量 $\mathbf{A}_i = (0 \ \rho_i \ 0)^T$,其中 ρ_i 表达式如下:

$$\rho_i = \begin{cases} P_y - (-1)^i \sqrt{l^2 - P_x^2}, & (i=1,2) \\ F_y + (-1)^i \sqrt{l^2 - (d - F_x)^2}, & (i=3,4) \end{cases}, \quad (4)$$

其中: P_x, P_y 分别为 P 点在基坐标系中的横、纵坐标分量, F_x, F_y 分别为 F 点在基坐标系中的横、纵坐标分量, l 为分支杆的长度, d 为两侧滑块导轨之间的距离。

结合上述求得的 A_i, P, F 以及动平台参考点 E 的位置矢量, 建立机构的位置矢量方程:

$$\rho_i \mathbf{e} + l \mathbf{L}_i = \mathbf{E} + \mathbf{Q}, \quad (5)$$

其中: $\mathbf{e} = (0 \ 1 \ 0)^T$ 与基坐标系中 Y 轴重合, $\mathbf{L}_i = (\sigma_{ix} \ \sigma_{iy} \ \sigma_{iz})^T$ 为点 A_i 指向点 P 或 F 的单位矢量, $\mathbf{Q} = \begin{cases} \mathbf{R}_i \mathbf{M}, (i=1,2) \\ \mathbf{R}_i \mathbf{R}_i \mathbf{N}, (i=3,4) \end{cases}$

将式(5)对时间 t 求导可得:

$$\dot{\rho}_i \mathbf{e} + l(\mathbf{w}_i \times \mathbf{L}_i) = \mathbf{V} + \mathbf{W} \times \mathbf{Q}, (i=1,2,3,4), \quad (6)$$

其中: \mathbf{w}_i 为分支杆的角速度, \mathbf{V}, \mathbf{W} 分别为动平台参考点 E 线速度及动平台角速度矢量。

式(6)两边同时点乘 \mathbf{L}_i 得:

$$\dot{\rho}_i \mathbf{e} \cdot \mathbf{L}_i = \mathbf{V} \cdot \mathbf{L}_i + (\mathbf{Q} \times \mathbf{L}_i) \cdot \mathbf{W}. \quad (7)$$

式(7)可写成矩阵形式:

$$\dot{\rho}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_i^T \\ \mathbf{e} \cdot \mathbf{L}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \times \mathbf{L}_i \\ \mathbf{e} \cdot \mathbf{L}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_i \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中 \mathbf{J}_i 为 1×6 型滑块线速度雅可比矩阵。

用 \mathbf{L}_i 叉乘式(6)两端可得:

$$\dot{\rho}_i \mathbf{L}_i \times \mathbf{e} + l \mathbf{L}_i \times (\mathbf{w}_i \times \mathbf{L}_i) = \mathbf{L}_i \times \mathbf{V} + \mathbf{L}_i \times (\mathbf{W} \times \mathbf{Q}), \quad (9)$$

将式(8)代入式(9), 并整理可得分支杆角速度矢量表达式为:

$$\mathbf{w}_i = [(\hat{\mathbf{L}}_i \ (\mathbf{L}_i \cdot \mathbf{Q}) \mathbf{D} - (\mathbf{L}_i \times \mathbf{e}) \mathbf{J}_i)] \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{wi} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中: \mathbf{I} 为 3×3 的单位阵, $\hat{\mathbf{L}}_i$ 为 \mathbf{L}_i 的反对称矩阵

$$\hat{\mathbf{L}}_i = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_{iz} & \sigma_{iy} \\ \sigma_{iz} & 0 & -\sigma_{ix} \\ -\sigma_{iy} & \sigma_{ix} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_{wi} \text{ 为 } 3 \times 6 \text{ 型分支杆}$$

角速度雅可比矩阵。

设分支杆的质心位于杆长的中间位置, 然后结合式(10)可得分支杆质心速度:

$$\mathbf{v}_{ci} = \dot{\rho}_i \mathbf{e} + \frac{l}{2} \mathbf{w}_i \times \mathbf{L}_i. \quad (11)$$

然后, 将式(8)和式(10)代入式(11), 整理可得分支质心线速度矢量表达式:

$$\mathbf{v}_{ci} = \left[\mathbf{e} \mathbf{J}_i - \frac{l}{2} \mathbf{w}_i \times \hat{\mathbf{L}}_i \mathbf{J}_{wi} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{ci} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中 \mathbf{J}_{ci} 为 3×6 型分支杆质心线速度雅可比矩阵。

4 刚度及质量矩阵

运动冗余和驱动冗余平面并联机构与非冗余平面并联机构(既非运动冗余又非驱动冗余的并联机构)相比具有较好的灵活性。然而, 由于动平台和中间连杆之间的转动副, 使得运动冗余平面并联机构的刚度性能与驱动冗余平面并联机构的刚度性能相比较差。非冗余平面并联机构的刚度矩阵和冗余驱动并联机构刚度矩阵的求解过程类似, 下文仅以驱动冗余平面并联机构为例进行分析。

4.1 刚度矩阵的建立

文献[11]中仅分析了运动冗余平面并联机构的刚度特性, 并未体现驱动冗余平面并联机构的刚度特性。本文为了探究冗余分支杆对机构刚度的影响, 建立了该平面并联机构的刚度矩阵, 需对平面并联机构进行单一变量处理, 并对机构模型进行一定的简化与假设。设机架、滑块和动平台的刚度较大, 故此忽略其弹性变形, 仅考虑分支杆长方向的变形^[25-26]。由于分支的变形将使动平台产生一定的线位移 $\Delta \mathbf{F}$ 和角位移 $\Delta \mathbf{\Phi}$, 设作用于机构动平台的外力为 \mathbf{F} 、外力矩 \mathbf{T} , 机构变形前后示意图如图 3 所示。

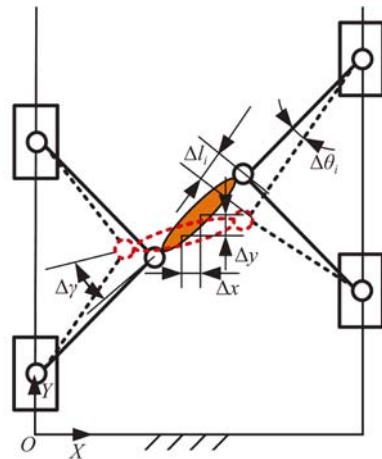


图 3 结构变形示意图

Fig. 3 Schematic of structure deformation

对于单分支杆来说, 分支杆变形后的变形矢量方程可根据式(5)得:

$$\Delta l_i \mathbf{L}_i + l \Delta \theta_i \times \mathbf{L}_i = \Delta \mathbf{F} + \Delta \mathbf{\Phi} \times \mathbf{Q}, \quad (13)$$

其中: Δl_i 为分支杆长度得变化量, $\Delta \theta_i$ 为分支杆的角位移矢量。

式(13)两边同时点乘 \mathbf{L}_i , 整理可得:

$$\Delta l_i = \mathbf{L}_i^T \Delta \mathbf{\Gamma} + (\mathbf{Q} \times \mathbf{L}_i)^T \Delta \mathbf{\Phi}, \quad (14)$$

式(14)可写成矩阵形式:

$$\Delta l_i = (\mathbf{L}_i^T \quad (\mathbf{Q} \times \mathbf{L}_i)^T) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{\Gamma} \\ \Delta \mathbf{\Phi} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{ki} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{\Gamma} \\ \Delta \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

其中 \mathbf{J}_{ki} 为 1×6 型矩阵。

对于机构整体, 利用虚功原理可得:

$$(\Delta \mathbf{\Gamma}^T \quad \Delta \mathbf{\Phi}^T) \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \Delta l_i \mathbf{L}_i^T \mathbf{f}_i, \quad (16)$$

其中: $\mathbf{f}_i = k_i \Delta l_i \mathbf{L}_i$ 为分支杆所受轴向力矢量, k_i 为分支杆的轴向刚度, 可由式(17)求得:

$$\frac{1}{k_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{k_j}, \quad (17)$$

其中: k_j 为分支杆等效串联元素的刚度, n 为单分支中等效串联元素的个数。如图 4 所示, 平面并联机构 $(2\text{PRR})^2 + \text{R}$ 的分支杆本体刚度与分支杆连接滑块和动平台/中间连杆铰链刚度的串联刚度可等效为分支杆的整体刚度。

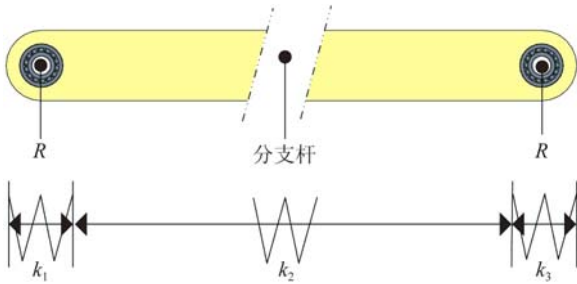


图 4 分支杆线刚度模型

Fig. 4 Linear stiffness model of limb

将式(15)代入式(16)并整理得:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 k_i \mathbf{J}_{ki}^T \mathbf{J}_{ki} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{\Gamma} \\ \Delta \mathbf{\Phi} \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{\Gamma} \\ \Delta \mathbf{\Phi} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

其中 $\mathbf{K} = \sum_{i=1}^4 k_i \mathbf{J}_{ki}^T \mathbf{J}_{ki}$ 为 6×6 型的刚度矩阵。

4.2 质量矩阵的建立

为方便建立机构的质量矩阵, 设机构中滑块的质量为 m_{hi} , 分支杆的质量和转动惯量分别为 m_{fi} 和 I_{fi} , 动平台的质量和转动惯量分别为 m_d 和 I_d 。

由于滑块仅能沿竖直方向运动, 所以 4 个滑块的总动能可表达为:

$$E_h = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \dot{\mathbf{p}}_i^T m_{hi} \dot{\mathbf{p}}_i, \quad (19)$$

将式(8)代入式(19)得:

$$E_h = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}^T \left(\sum_{i=1}^4 m_{hi} \mathbf{J}_i^T \mathbf{J}_i \right) \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}^T \mathbf{M}_h \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

式中 \mathbf{M}_h 为系统滑块的质量矩阵。

分支杆的动能由两部分组成, 4 条分支杆的总动能可表达为:

$$E_f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (\mathbf{v}_{cix}^T m_{fi} \mathbf{v}_{cix} + \mathbf{v}_{ciy}^T m_{fi} \mathbf{v}_{ciy}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \omega_{iz}^T I_{fi} \omega_{iz}, \quad (21)$$

其中, \mathbf{v}_{cix} 和 \mathbf{v}_{ciy} 分别为分支杆质心速度沿 X 轴和 Y 轴的速度分量, ω_{iz} 为分支角速度的标量值。

结合式(12), \mathbf{v}_{cix} 可写成矩阵形式如下:

$$\mathbf{v}_{cix} = \mathbf{e}_0^T \mathbf{J}_{ci} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

式中 $\mathbf{e}_0 = (1 \ 0 \ 0)^T$ 。同理, \mathbf{v}_{ciy} 可写成矩阵形式如下:

$$\mathbf{v}_{ciy} = \mathbf{e}^T \mathbf{J}_{ci} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

结合式(10), ω_{iz} 可写成矩阵形式如下:

$$\omega_{iz} = \mathbf{e}_i^T \mathbf{J}_{wi} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

式中 $\mathbf{e}_i = (0 \ 0 \ 1)^T$ 。

将式(22)、式(23)和式(24)代入式(21), 然后整理可得:

$$E_f = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}^T \left[\sum_{i=1}^4 (m_{fi} \mathbf{J}_{ci}^T \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0^T \mathbf{J}_{ci} + m_{fi} \mathbf{J}_{ci}^T \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{J}_{ci}) + \sum_{i=1}^4 I_{fi} \mathbf{J}_{wi}^T \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T \mathbf{J}_{wi} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}^T \mathbf{M}_f \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

其中 \mathbf{M}_f 为分支的质量矩阵。

类似于分支杆的动能, 动平台的动能可表达为:

$$E_d = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}^T \text{diag}(m \ m \ 0 \ 0 \ 0 \ I_d) \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}^T \mathbf{M}_d \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

其中 \mathbf{M}_d 为动平台的质量矩阵。

综上可知平面并联机构的总动能为:

$$E = E_h + E_f + E_d = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}^T \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

其中 $\mathbf{M} = \mathbf{M}_h + \mathbf{M}_f + \mathbf{M}_d$ 为系统的质量矩阵。

5 固有频率

由式(18)和式(27)可分别得出机构的刚度矩阵和质量矩阵,设 \mathbf{H} 、 $\dot{\mathbf{H}}$ 和 $\ddot{\mathbf{H}}$ 分别为动平台的位置、速度和加速度矢量,则机构的动力学方程可表示为^[25-26]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{H}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{H}}+\mathbf{K}\mathbf{H}=\mathbf{F}_0, \quad (28)$$

其中: \mathbf{C} 为阻尼矩阵, \mathbf{F}_0 为机构动平台所受外力。由于阻尼对机构的固有频率影响较小,所以可将阻尼忽略。该机构的固有频率方程可表达为:

$$|-\omega^2\mathbf{M}+\mathbf{K}|=0, \quad (29)$$

其中 ω 为机构的固有频率。

将上述求得的机构刚度矩阵和质量矩阵代入式(29),即可求得该平面并联机构的固有频率。

6 数值仿真

为了对比冗余驱动分支对并联机构本身刚度性能和动态性能的影响,下面将对不同类型的并联机构进行数值仿真运算。

机构参数:立柱跨距 d 、分支长度 l 、动平台中 PE 长度 m 、动平台中 EF 长度 n 。物理参数:滑块的质量 m_{hi} ;分支杆的质量 m_{li} ,绕 Z 轴的转动惯量 I_{li} ;动平台的质量 m_d ,绕 Z 轴的转动惯量 I_d 。规划该平面并联机构的工作空间为水平与竖直边

长均为 h 的方形区域,动平台的姿态为沿水平方向的定姿态。结构参数和物理参数的具体数值请参照表 1。

表 1 结构及物理参数

Tab.1 Structural and physical parameters

结构/物理参数	数值
立柱跨距 d/m	0.560
分支长度 l/m	0.388
PE 长度 m/m	0.180
EF 长度 n/m	0.060
边长 h/m	0.2
滑块质量 m_{hi}/kg	15
分支杆的质量 m_{li}/kg	18
动平台的质量 m_d/kg	20
转动惯量 $I_{li}/(kg \cdot m^2)$	1
转动惯量 $I_d/(kg \cdot m^2)$	1.2

为了对比分析平面并联机构冗余驱动和非冗余驱动机构的刚度特点,分别计算了两种驱动模式的刚度特性。图 5 分别给出了该平面并联机构冗余驱动和非冗余驱动情况下的刚度分析结果,其中非冗余驱动平面并联机构对应的是图 1 中去除分支杆 4 的机构模型。

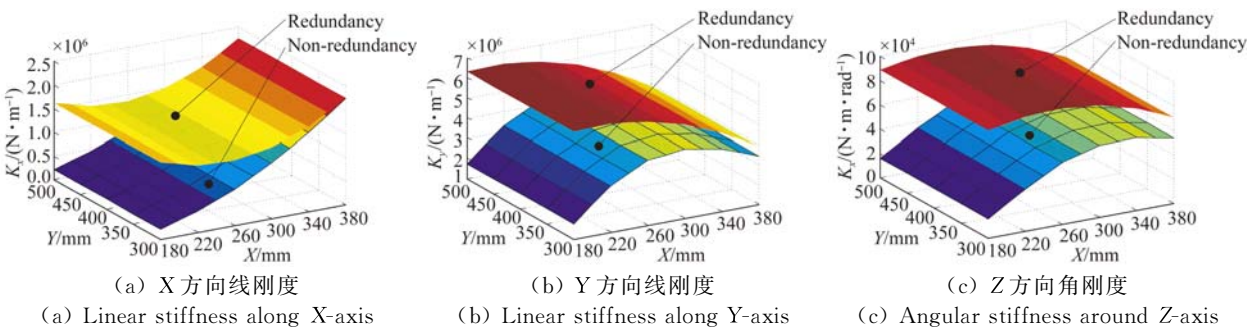


图 5 冗余/非冗余驱动机构刚度

Fig.5 Stiffness distribution of the kinematic/actuation redundancy planar parallel mechanism

通过对比分析图 5(a)~(c),可知含有冗余驱动的平面并联机构与非冗余驱动的平面并联机构的刚度相比,含有冗余驱动的平面并联机构刚度在 X、Y 轴方向的线刚度,以及绕 Z 轴的角刚度均有显著的提升;当动平台位置向量中 Y 值分量

一致时,冗余和非冗余驱动平面并联机构沿 X、Y 轴方向的线刚度及绕 Z 轴的角刚度差随 X 轴坐标的增大而减小;当动平台位置向量中 X 值分量一致时,冗余和非冗余驱动平面并联机构沿 X、Y 轴方向的线刚度及绕 Z 轴的角刚度差随 Y 轴坐

标的增大而不变;综上可知,含有冗余驱动的平面并联机构比非冗余驱动平面并联机构具有更好的承载能力。

在上述规划的工作空间范围内,冗余和非冗余驱动平面并联机构刚度的平均值及其增幅请参照表 2。

为了进一步了解该平面并联机构的动态性能,将机构的参数代入式(29),在上述规划工作空间内进行求解。图 6 给出了该平面并联机构冗余

和非冗余驱动情况下的固有频率分析结果。

表 2 刚度均值对比

Tab. 2 Mean value comparison of the stiffness

均值	非冗余	冗余	增幅/%
X 轴方向线刚度/(N·m ⁻¹)	1.07×10 ⁶	1.63×10 ⁶	52.34
Y 轴方向线刚度/(N·m ⁻¹)	3.63×10 ⁶	5.60×10 ⁶	54.27
Z 轴方向角刚度/(Nm·rad ⁻¹)	4.68×10 ⁴	8.82×10 ⁴	88.46

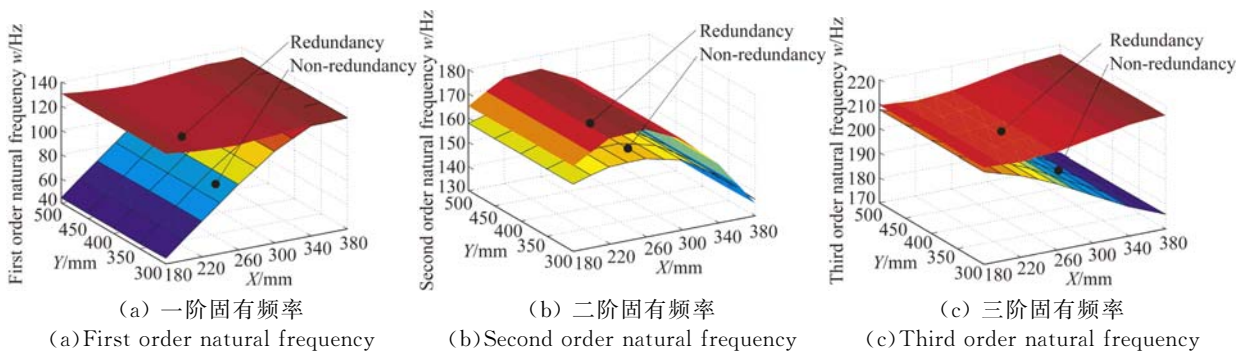


图 6 冗余/非冗余驱动机构固有频率

Fig. 6 Natural frequency distribution of the kinematic/actuation redundancy planar parallel mechanism

通过对比分析图 6(a)~(c),可知含有冗余驱动的平面并联机构与非冗余驱动的平面并联机构的前三阶固有频率相比,含有冗余驱动的平面并联机构前三阶固有频率均有显著的提升;当动平台位置向量中 Y 值分量一致时,冗余和非冗余驱动平面并联机构的第一阶固有频率差随 X 轴坐标的增大而减小,第二阶固有频率差随 X 轴坐标的增大先增大后减小,第三阶固有频率差随 X 轴坐标的增大而增大;当动平台位置向量中 X 值分量一致时,冗余和非冗余驱动平面并联机构的前三阶固有频率差随 Y 轴坐标的增大而不变;综上可知,含有冗余驱动的平面并联机构与非冗余驱动平面并联机构相比具有更好的动态性能。

在上述规划的工作空间范围内,冗余和非冗余驱动平面并联机构前三阶固有频率的平均值及其增幅请参照表 3。

表 3 固有频率均值对比

Tab. 3 Mean value comparison of natural frequency

固有频率均值/Hz	非冗余	冗余	增幅/%
一阶	98.4	129.4	31.50
二阶	155.1	162.7	4.90
三阶	192.6	211.9	10.02

通过上述的数值仿真可知,通过添加冗余驱动分支可以提高机构的刚度性能,同时有助于改善机构的动态性能。对比分析图 5 和图 6 可知,该平面并联机构的刚度和固有频率主要受动平台沿 X 轴方向运动的影响。故为了进一步凸显(2PRR)²+R 平面并联机构的特点,展现该平面并联机构动平台和中间连杆之间冗余自由度对机构刚度的影响,图 7 给出了该平面并联机构刚度与冗余自由度和动平台位置之间的关系。

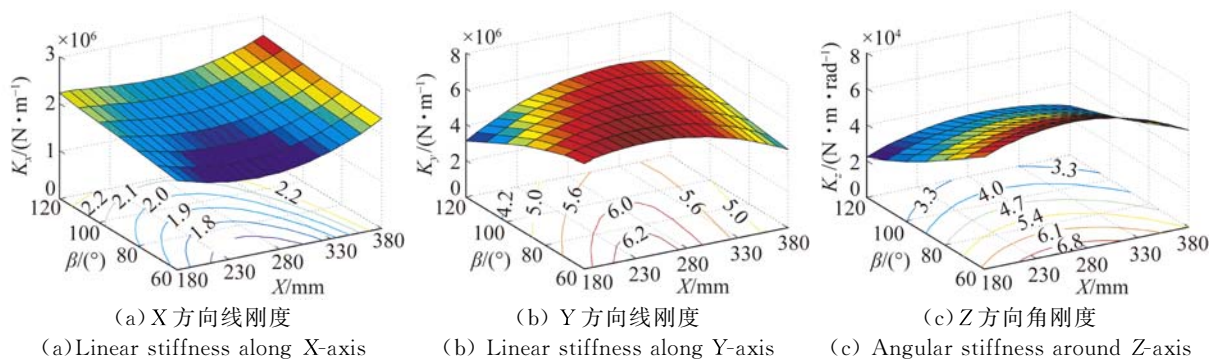


图 7 动平台对冗余驱动机构刚度影响

Fig. 7 Stiffness distribution under the influence of moving platform

图 7 给出了并联机构刚度关于动平台尺寸和位置的分布情况,结合图中刚度分布曲面及刚度图谱可以更好的了解该平面并联机构的刚度。为充分发挥机器人的刚度性能提供直观参考。

7 结 论

本文建立了平面并联机构的运动学模型,得到了机构各组成构件与末端广义速度之间的线速度/角速度雅可比矩阵。基于平面并联机构的运动学模型理论,建立了平面并联机构的刚度矩阵;运用能量守恒得到各组成原件的等效质量,进而求得系统的质量矩阵。利用系统刚度矩阵和质量

矩阵得到并联机构动力学方程,并根据动力学方程求得了机构的固有频率方程。对冗余/非冗余驱动并联机构进行了对比分析,其中: X 轴方向线刚度均值增幅为 52.34%, Y 轴方向线刚度均值增幅为 54.27%, Z 轴方向角刚度均值增幅为 88.46%,一阶固有频率增幅为 31.50%,二阶固有频率增幅为 4.90%,三阶固有频率增幅为 10.02%。为了展现该平面并联机构动平台和中间连杆之间冗余自由度大小对机构刚度的影响,绘制了工作空间内冗余驱动平面并联机构整体刚度曲面和图谱,结果显示冗余驱动并联机构在系统刚度和动态性能方面具有显著的提升。

参考文献:

- [1] PATEL Y D, GEORGE P M. Parallel manipulators applications—a survey [J]. *Modern Mechanical Engineering*, 2012, 2(3):57-64.
- [2] 曲海波, 梁艺瀚, 方跃法, 等. 4-RRS 冗余球面并联机构的静力学与刚度分析[J]. *机械工程学报*, 2015, 51(11):8-15.
QU H B, LIANG Y H, FANG Y F, et al.. Statics and stiffness analysis of 4-RRS redundant spherical parallel mechanism [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 51(11):8-15. (in Chinese)
- [3] 苑飞虎, 赵铁石, 赵延治, 等. 并联机构承载能力分析[J]. *中国机械工程*, 2015, 26(7):871-877.
YUAN F H, ZHAO T S, ZHAO Y ZH, et al.. Analysis of load carrying capacity of parallel mechanism [J]. *China Mechanical Engineering*, 2015, 26(7):871-877. (in Chinese)
- [4] 陈修龙, 董芳杞, 王清. 基于牛顿-欧拉法的 4-UPS-UPU 并联机构动力学方程[J]. *光学精密工程*, 2015, 23(11):3129-3137.
CHEN X L, DONG F Q, WANG Q. Dynamic equation of 4-UPS-UPU parallel mechanism based on New-Euler approach [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2015, 23(11):3129-3137. (in Chinese)
- [5] WU G L, BAI S P, KEPLER J. Stiffness characterization of a 3-PPR planar parallel manipulator with actuation compliance [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2015, 229(12):2291-2302.
- [6] ZHANG X CH, ZHANG X M, CHEN ZH. Dynamic analysis of a 3-RRR parallel mechanism with multiple clearance joints [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2014, 78:105-115.
- [7] 赵磊, 梁超, 张德福, 等. 基于 3-RRR 结构的光学元件柔顺微动调整机构的位姿正解[J]. *光学精密工程*, 2016, 24(6):1373-1381.

- ZHAO L, LIANG CH, ZHANG D F, *et al.*. Forward kinematics of 3-RRR flexure parallel mechanism used in lens micro-adjustment [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2016, 24(6):1373-1381. (in Chinese)
- [8] LIM H, LEE S H, SO B R, *et al.*. Design of a new 6-DOF parallel mechanism with a suspended platform [J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2015, 13(4):942-950.
- [9] EBRAHIMI I, CARRETERO J A, BOUDREAU R. 3-PRRR redundant planar parallel manipulator: Inverse displacement, workspace and singularity analyses [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2007, 42(8):1007-1016.
- [10] KOTLARSKI J, HEIMANN B, ORTMAIER T. Influence of kinematic redundancy on the singularity-free workspace of parallel kinematic machines [J]. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 2012, 7(2):120-134.
- [11] ZHANG D SH, XU Y D, YAO J T, *et al.*. Kinematics, dynamics and stiffness analysis of a novel 3-DOF kinematically/actuation redundant planar parallel mechanism [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2017, 116:203-219.
- [12] LUCES M, MILLS J K, BENHABIB B. A review of redundant parallel kinematic mechanisms [J]. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2016, 86(2):175-198.
- [13] GOSSELIN C, SCHREIBER L T. Kinematically redundant spatial parallel mechanisms for singularity avoidance and large orientational workspace [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2016, 32(2):286-300.
- [14] 牛雪梅, 高国琴, 刘辛军, 等. 三自由度驱动冗余并联机构动力学建模与试验[J]. *农业工程学报*, 2013, 29(16):31-41.
- NIU X M, GAO G Q, LIU X J, *et al.*. Dynamics modeling and experiments of 3-DOF parallel mechanism with actuation redundancy [J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering*, 2013, 29(16):31-41. (in Chinese)
- [15] LIU H T, HUANG T, KECSKEMÉTHY A, *et al.*. Force/motion transmissibility analyses of redundantly actuated and overconstrained parallel manipulators [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2017, 109:126-138.
- [16] 周鑫, 许允斗, 姚建涛, 等. 5-U(P)S/(P)RPU 冗余驱动并联机床完整刚度模型及其刚度特性[J]. *光学精密工程*, 2015, 23(4):1070-1080.
- ZHOU X, XU Y D, YAO J T, *et al.*. Complete stiffness model and stiffness performance of 5-U(P)S/(P)RPU redundantly actuated parallel machine tool [J]. *Opt. Precision Eng.*, 2015, 23(4):1070-1080. (in Chinese)
- [17] LI S H, LIU Y M, CUI H L, *et al.*. Synthesis of branched chains with actuation redundancy for eliminating interior singularities of 3T1R parallel mechanisms [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2016, 29(2):250-259.
- [18] 李剑锋, 费仁元, 范金红, 等. 驱动器布位及冗余驱动对 Tricept 并联机构性能的影响[J]. *机械工程学报*, 2008, 44(1):31-39.
- LI J F, FEI R Y, FAN J H, *et al.*. Effects of actuator disposition and redundant actuation on performance of the Tricept parallel mechanism [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2008, 44(1):31-39. (in Chinese)
- [19] JIANG Y, LI T M, WANG L P. The dynamic modeling, redundant-force optimization, and dynamic performance analyses of a parallel kinematic machine with actuation redundancy [J]. *Robotica*, 2015, 33(2):241-263.
- [20] HARADA T, LIU P D. Internal and external forces measurement of planar 3-DOF redundantly actuated parallel mechanism by axial force sensors [J]. *ISRN Robotics*, 2013, 2013:593606.
- [21] ISAKSSON M, GOSSELIN C, MARLOW K. An introduction to utilising the redundancy of a kinematically redundant parallel manipulator to operate a gripper [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2016, 101:50-59.
- [22] REVELES D, PAMANES G J A, WENGER P. Trajectory planning of kinematically redundant parallel manipulators by using multiple working modes [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2016, 98:216-230.
- [23] GOSSELIN C, LALIBERTÉ T, VEILLETTE A. Singularity-free kinematically redundant planar parallel mechanisms with unlimited rotational capability [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2015, 31(2):457-467.
- [24] 张东胜, 许允斗, 侯照伟, 等. 五自由度混联机器人优化设计与运动学分析[J]. *农业工程学报*, 2016, 32(24):69-76.
- ZHANG D SH, XU Y D, HOU ZH W, *et al.*

- Optimal design and kinematics analysis of 5-DOF hybrid serial-parallel manipulator [J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering*, 2016, 32(24):69-76. (in Chinese)
- [25] WU J, LI T M, WANG J S, *et al.*. Stiffness and natural frequency of a 3-DOF parallel manipulator with consideration of additional leg candidates [J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2013, 61(8): 868-875.
- [26] WU J, CHEN X M, LI T M, *et al.*. Optimal design of a 2-DOF parallel manipulator with actuation redundancy considering kinematics and natural frequency [J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2013, 29(1):80-85.

作者简介:



张东胜(1988—),男,河北沧州人,博士研究生,2013年于燕山大学获得学士学位,主要从事机器人技术、机构学理论及其应用技术。E-mail: yszuds@163.com



赵永生(1962—),男,吉林龙井人,教授,博士生导师,1983年、1987年、1999年于东北重型机械学院、燕山大学分别获得学士、硕士、博士学位,主要从事机器人技术,传感器技术,机构学理论及其应用技术。E-mail: yszhao@ysu.edu.cn